ЕГЭ (2021 г, задача с параметрами). Найдите все значения а, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2-a}=\sqrt{y^2+1-a}, \\ x^2+y^2=8x+6y\end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

Решение.

Рассмотрим первое уравнение $\sqrt{x^2+y^2-a}=\sqrt{y^2+1-a}$. Обе части этого уравнения принимают неотрицательные значения, тогда их можно возвести в квадрат. С учетом ограничения на подкоренное выражение получим $\begin{cases}x^2+y^2-a=y^2+1-a \\ x^2+y^2-a\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x^2-1=0 \\ a\leq x^2+y^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=1, \\ x=-1\end{array}\right. \\ a\leq x^2+y^2\end{cases}$.

Рассмотрим второе уравнение $x^2+y^2=8x+6y$. Это уравнение окружности, выделим полные квадраты и получим $(x-4)^2+(y-3)^2=25$.

Построим графики уравнений без учета ограничений (рисунок 1). Точки пересечения графиков – есть корни системы уравнений, их три. Ограничения представляет собой внутреннюю часть круга с границей с центром (0;0). Необходимо разместить ограничения таким образом, чтобы корней стало ровно два (рисунок 2). Это возможно когда один корень попадает в область ограничения, а два другие нет.

Рисунок 1.

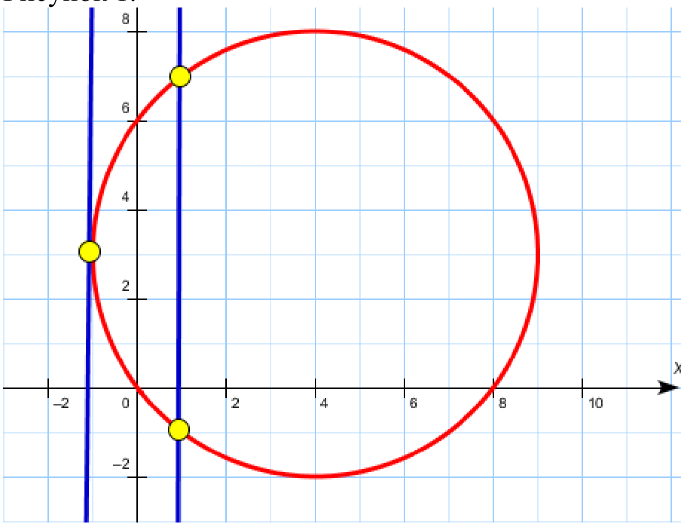
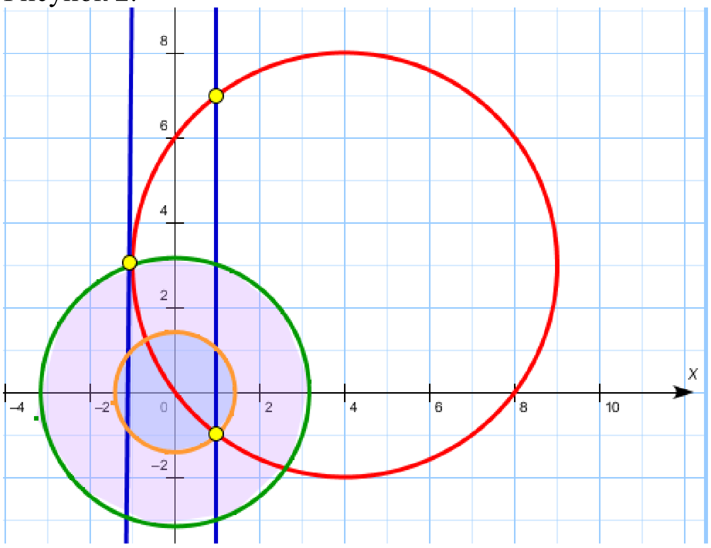


Рисунок 2.



Первое положение: область проходит через точку пересечения прямой $x=1$ и окружности. Вторая точка, точка пересечения прямой $x=-1$ и окружности. Найдем координаты этих точек.

При $x=1 \Rightarrow (1-4)^2+(y-3)^2=25 \Rightarrow y_1=-1;\ y_2=7$. Нас интересует точка с координатами $(1;-1)$. Для нее найдем параметр. Для этого подставим координаты точки в ограничения $a=1^2+(-1)^2 \Rightarrow a=2$

При $x=-1 \Rightarrow (-1-4)^2+(y-3)^2=25 \Rightarrow y_1=3$. Нас интересует точка с координатами $(-1;3)$. Для нее найдем параметр. Для этого подставим координаты точки в ограничения $a=(-1)^2+(3)^2 \Rightarrow a=10$.

Ответ: $a\in(2;10]$